ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ.

Мой доклад посвящен одному из новых направлений в современной математике – фрактальному анализу и применению его к исследованию временных рядов.

Позвольте начать с определения фрактала.

Само понятие ***фрактал*** было введено Бенуа Мандельбротом в семидесятые годы. Термин происходит от латинского fractus, прилагательного от глагола frangere – ломать, разбивать на части. То есть, как гласит одно из определений фракталов, фрактал - это множество, части которого подобны целому.

Классическим примером природного фрактального объекта служит береговая линия. С трудностями при измерении длины береговой линии Британии столкнулся в начале нашего века английский гидромеханик Ричардсон при попытке заменить линию ломаной. Оказалось, что при уменьшении масштаба измерения, длина ломаной резко возрастает.

Мандельброт предложил аппроксимировать степень увеличения длины береговой линии в зависимости от масштаба степенным законом.

Основной характеристикой фрактального объекта является фрактальная размерность

$$D = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)} . \qquad (1)$$

Соответственно, если изучаемый объект близок к фракталу, то зависимость числа кубов, занятых объектом от размера элементарной ячейки будет расти в степенной зависимости. А в дважды логарифмических координатах данная зависимость будет стремиться к прямой линии. (Что мы видим на Рис. 1) Фрактальная размерность определяется как тангенс угла наклона этой линии.

По Мандельброту, для фрактальных объектов фрактальная размерность должна быть больше топологической.

$$D > d_t \quad (2)$$

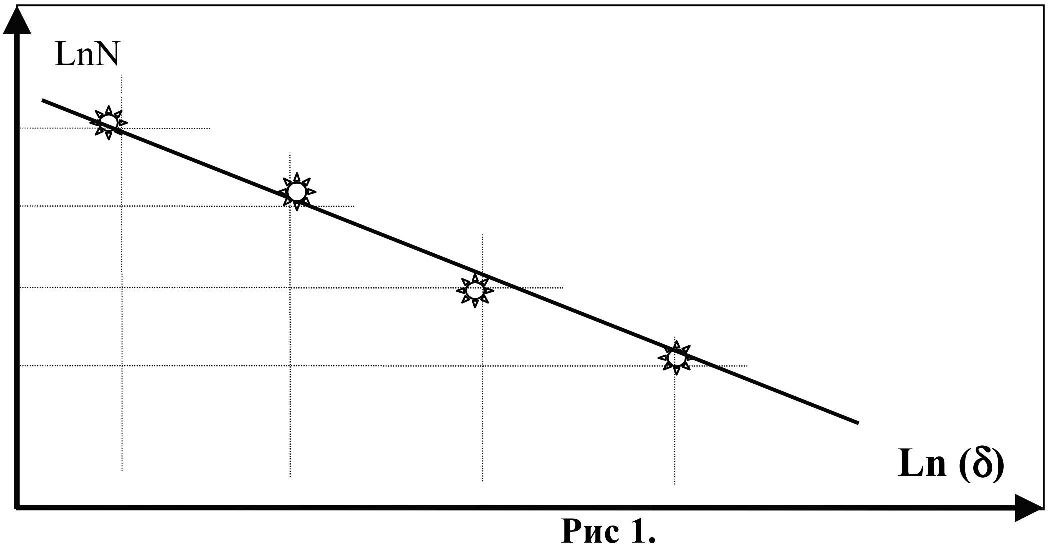


Рис 1.

Неравенству (2) можно придать определенный физический смысл. Оно характеризует усложнение множества. Если это кривая, с топологической размерностью равной 1, то кривую можно усложнить путем бесконечного числа изгибаний и ветвлений до такой степени, что ее фрактальная размерность приблизится к двум. То есть кривая, состоящая из линий размерностью 1, как целостный объект не сможет существовать вне плоскости.

По существу определения (1) фрактальная размерность отражает свойство масштабной инвариантности рассматриваемого множества.

В реальном мире чистых, упорядоченных фракталов, как правило не существует, и можно говорить лишь о фрактальных явлениях. Их следует рассматривать только как модели, которые приближенно являются фракталами в статистическом смысле. В последнее время развивается продолжение фрактальной теории – мультифрактальная. Мультифрактал – квазифрактальный объект с переменной фрактальной размерностью. Естественно, что реальные объекты и процессы гораздо лучше описываются мультифракталами.

Основной метафорой фрактальных множеств, служит метафора фрактальной копировальной машины. Имеется исходное множество, которое пропускается через некий механизм, вызывающий отображение его и добавляющий отображенное множество к исходному. Таким образом, после нескольких подобных относительно простых операций мы получаем достаточно сложное изображение. В процессе получения фрактала важны два момента: исходное множество и механизм преобразования. Принцип действия машины иллюстрируется на Рис 2.

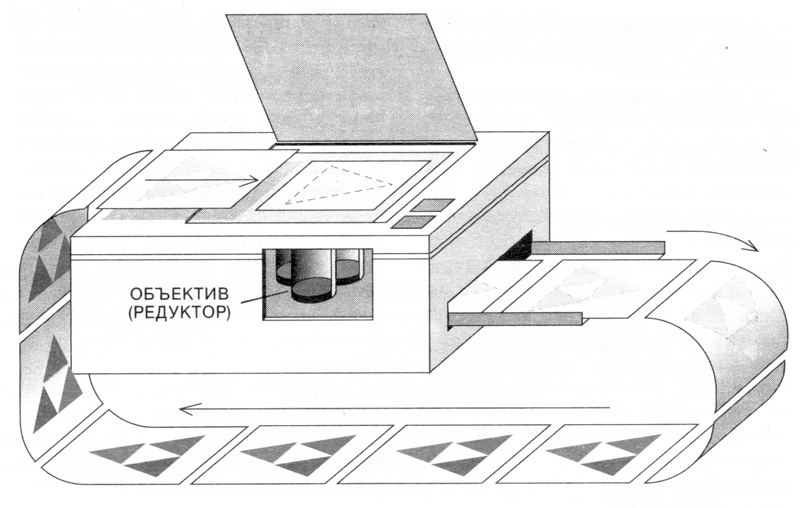
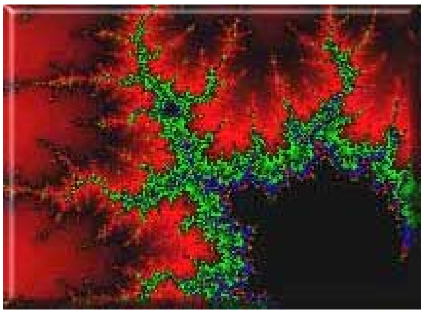


Рис 2. Фрактальная копировальная машина.

Важным моментом во фрактальном подходе является влияние предыстории на поведение системы сегодня. Естественно, влияние предыстории происходит через призму факторов влияния, то есть ту же копировальную машину.

Рассмотрим методику построения фрактальных множеств.

В зависимости от алгоритма построения фракталы делятся на линейные и нелинейные. Вследствие большой сложности анализа нелинейные фракталы



нашли пока только художественное применение. Примеры таких фракталов вы видите на Рис 3.

Далее перейдем к алгоритмам построения нелинейных фрактальных множеств.

Рассмотрим классический пример фрактального множества - триадную кривую Кох .

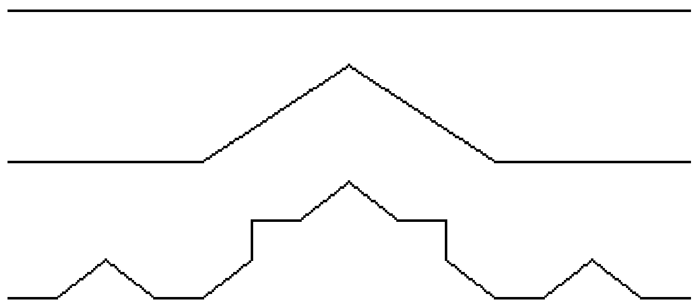


Рис 4. Построение триадной кривой Кох

Взяв в качестве элементарного звена достаточно простые фигуры, можно при помощи несложных алгоритмов замены получить довольно замысловатые фигуры.

Если построение кривой начинать не с отрезка, а с треугольника, и применить вышеперечисленные построения к каждой его стороне, то получим "снежинку" Кох (рис. 5).

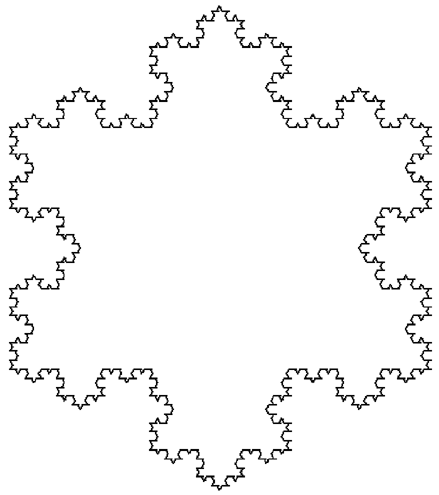


Рис 5. Снежинка Кох.

Другим способом построения фракталов служит способ Линденмайера или L - системы.

Принцип построения L – системы показан на Рис 6.

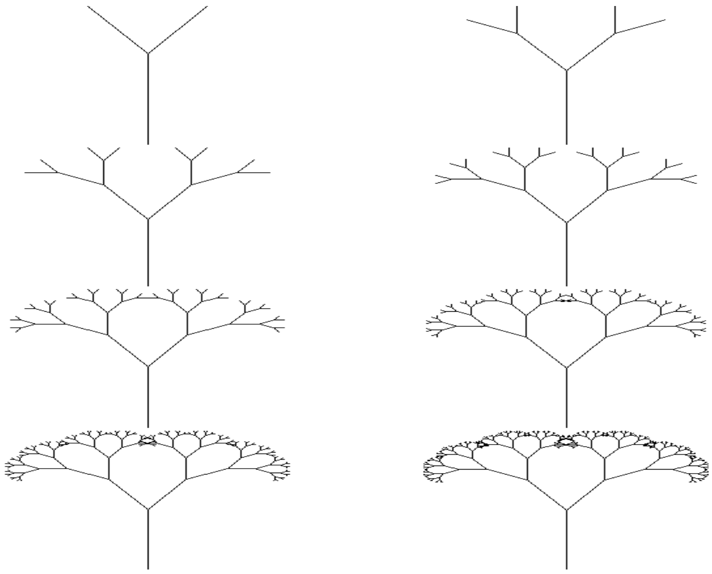


Рис 6.

Но самым распространенным способом получения геометрических фракталов служат системы IFS (iterated function system).

Система итерирующих функций - это совокупность сжимающих аффинных преобразований. Как известно, аффинные преобразования включают в себя масштабирование, поворот и параллельный перенос. Уравнение аффинного преобразования показано в выражении (3) Аффинное преобразование считается сжимающим, если коэффициент масштабирования меньше единицы. Растягивающие аффинные преобразования, как правило, не применяются. Пример аффинного преобразования – на рис 7.

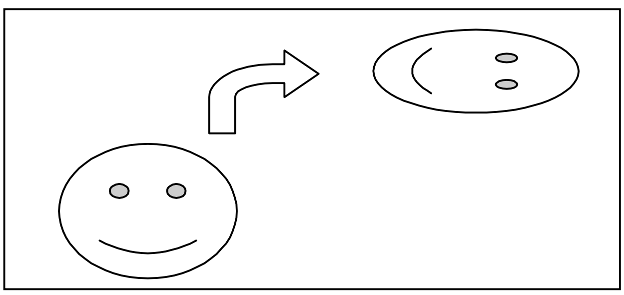


Рис 7. Преобразование при помощи аффинной матрицы.

Формула вычисления новых координат X',Y' при аффинных преобразованиях:

$$X` = X * A + Y * B + E$$

$$Y` = X * C + Y * D + F \qquad (3)$$

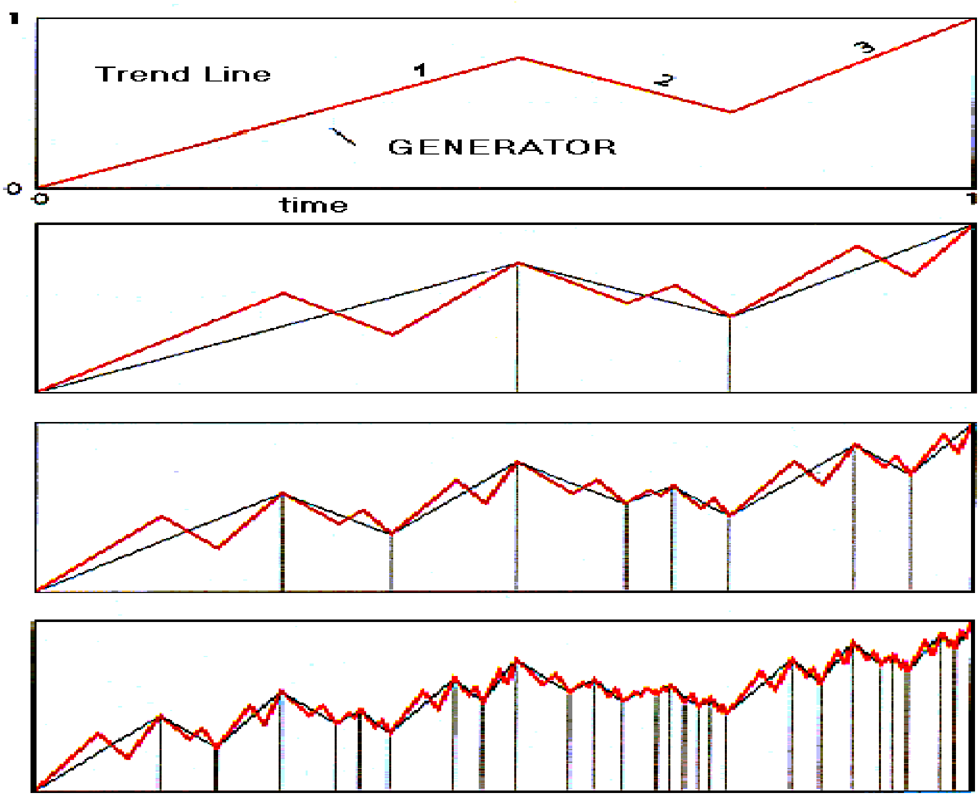
Коэффициенты уравнения иногда называются аффинной матрицей.

Одновременно может быть применено несколько аффинных матриц, или путей развития процесса, преобразования по которым могут быть и не равновероятными. Как, например, при построении классического фрактала – листа папоротника.

Рис 8.

Далее хотелось бы рассказать о применении фрактальных методов к анализу временных рядов. Временной ряд - совокупность наблюдаемых параметров изучаемой системы во времени.

Многие экспериментальные данные обладают фрактальной статистикой. Анализ и моделирование которой могут быть произведены с помощью методов фрактального анализа. Одним из самых перспективных направлений фрактального анализа является изучение динамики во времени такой характеристики, как фрактальная размерность (D).



На Рис 9. представлено поэтапное фрактальное моделирование временного ряда на основе его тренда.

Есть несколько методов определения фрактальной размерности для временного ряда.

Первое – это классический клеточный способ, когда график накрывают серией сеток и определяют фрактальную размерность точно так же, как и для геометрических фракталов.

Второй способ для исследования фрактальных временных рядов был предложен Бенуа Мандельбротом и базируется на исследованиях проведенных английским исследователем Херстом и носит название R/S метода. Он построен на анализе размаха параметра (наибольшим и наименьшим значением на изучаемом отрезке) и среднеквадратичного отклонения.

И третьим является способ, основанный на изменении длины кривой в зависимости от масштаба. Если кривая близка к фрактальной, то с уменьшением масштаба длина кривой будет возрастать степенным образом.

Особое значение фрактального анализа временных рядов в том, что он учитывает поведение системы не только в период измерений, но и его предысторию. Что достаточно хорошо соответствует метафоре фрактальной копировальной машины.

Для фрактальных временных рядов на интервале $t_0<t<T$ размах параметра R $R(\tau)=\max\limits_{1\le t\le\tau} \mathrm{B}(t) - \min\limits_{1\le t\le\tau} \mathrm{B}(t)$ зависит от времени t степенным образом:

$$R(t) = R(t_0)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2-D} \quad (3)$$

где: D–фрактальная размерность временного ряда. Исходя из данного выражения можно предсказать возможное значение размаха интересующего параметра в будущем.

Фрактальная размерность, является показателем сложности кривой. Анализируя чередование участков с различной фрактальной размерностью и тем, как на систему воздействуют внешние и внутренние факторы, можно научиться предсказывать поведение системы. И что самое главное, диагностировать и предсказывать нестабильные состояния.

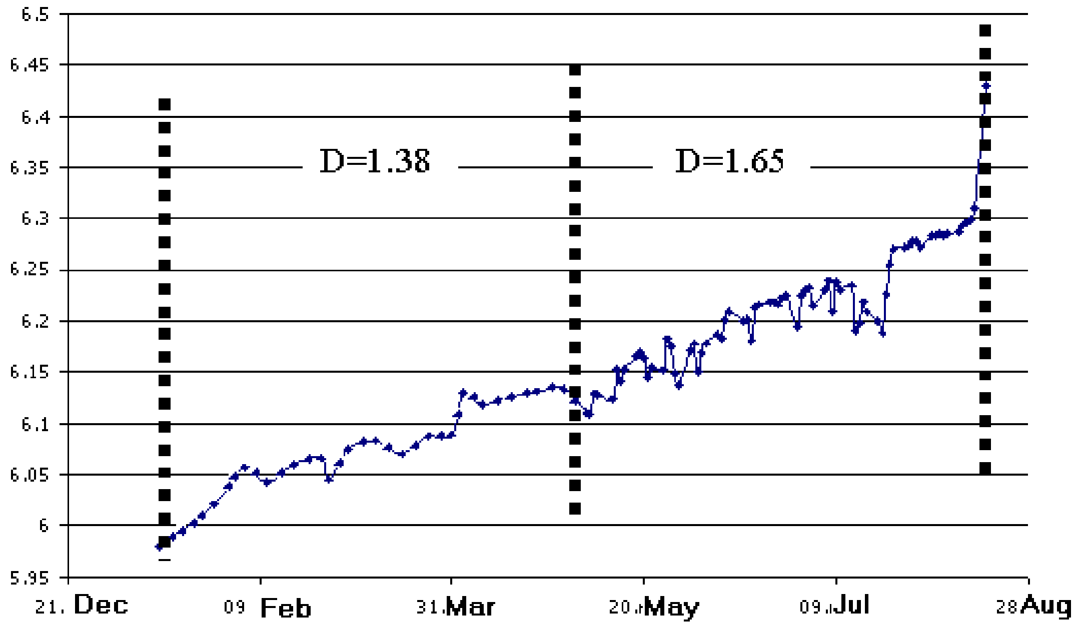


Рис 10.

Существенным моментом развиваемого нами подхода является наличие критического значения фрактальной размерности временной кривой, при приближении к которому система теряет устойчивость и переходит в нестабильное состояние и параметры быстро либо возрастает, либо убывает, в зависимости от тенденции, имеющей место в данное время.

Это хорошо видно если анализировать динамику курса даллара по отношению к российскому рублю во время кризиса 1998 года. Она изображена на Рис 10.   Проследив изменение динамики фрактальной размерности временного ряда, можно заметить резкий подъем фрактальной размерности непосредственно перед скачком курса доллара.

То есть фрактальная размерность определенной величины может использоваться как индикатор кризиса или "флаг" катастрофы.

Анализ экспериментальных данных показывает, что линия тренда для временного ряда хорошо описывается уравнением:

$$\bar{y}(t) = \bar{y}(t_0) + \frac{K_f(t_0)(t - t_0)}{(D - D_0)^{\beta}} . \qquad (4)$$

где: $\bar{y}(t_0)$. –среднее значение величины за период, предшествующий прогнозируемому; K_f и □ – коэффициенты, t_0– период времени, предшествующий прогнозируемому, t–время на которой делается прогноз, D_0–фрактальная размерность на периоде предыдущем прогнозируемому.

Также величина фрактальной размерности может служить индикатором количества факторов, влияющих на систему. При фрактальной размерности менее 1.4, на систему влияет одна или несколько сил, двигающих систему в одном направлении. Если размерность около 1.5, то силы, действующие на систему, разнонаправлены, но более или менее компенсируют друг друга. Поведение системы в этом случае является стохастическим и хорошо описывается классическими статистическими методами. Если же фрактальная размерность значительно более 1.6, система становится неустойчивой и готова перейти в новое состояние.

В этом плане можно рассмотреть динамику биржевого индекса Доу-Джонса. Она показана на рис. 11. Там же представлена среднегодовая фрактальная размерность временного ряда этого биржевого индекса. Во время достаточно стабильных периодов и медленных подъемов фрактальная размерность временного ряда оставалась достаточно невысокой, в то время как в периоды кризисов суммарная фрактальная размерность возрастала.

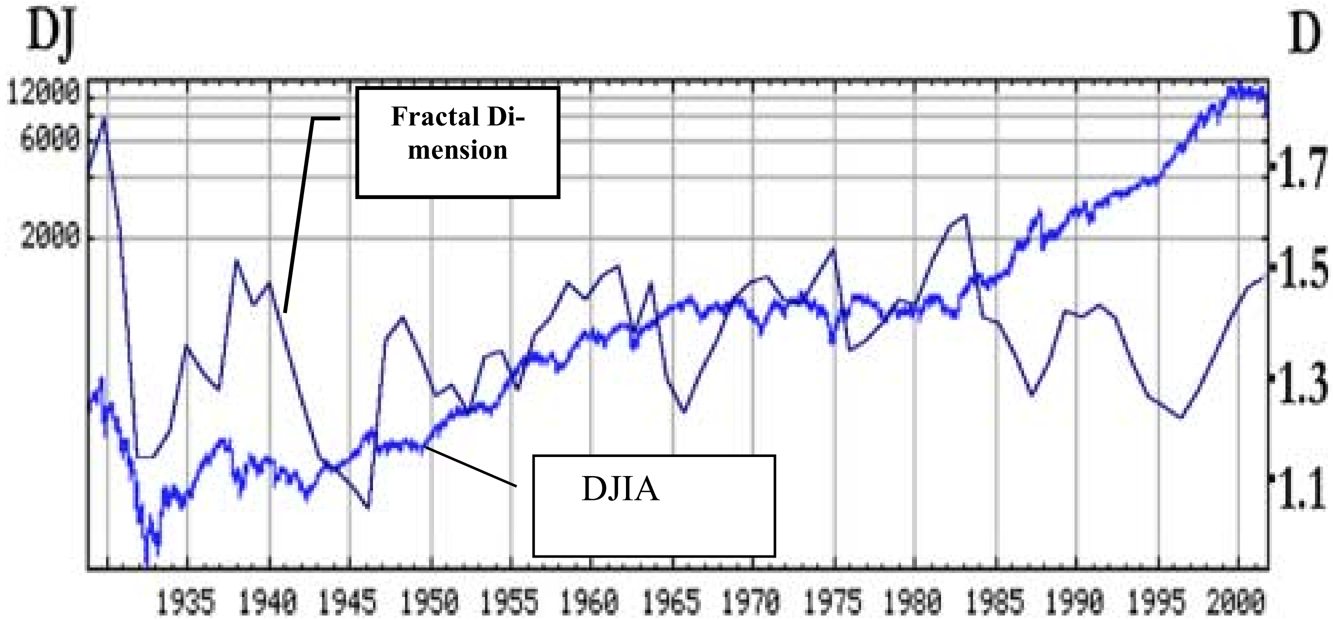


Рис 11.

Естественно это общие закономерности и для каждой системы надо устанавливать конкретные закономерности факторов влияния.

Классические финансовые модели предсказывают, что критические события должны происходить крайне редко. Как правило, они базируются на вероятности, вычисляемой по Гауссу или Пуассону. При этом существенно занижается вероятность критических событий. Краеугольный камень финансов - современная портфельная теория (portfolio theory), которая пытается максимизировать отдачу для данного уровня риска. Математика, лежащая в основе портфельной теории, обращается с чрезвычайными ситуациями с некоторым пренебрежением: она считает большие рыночные изменения слишком маловероятными. На наш взгляд она недооценивает формирующее влияние кризисов на систему.

Фрактал - геометрическая форма, которая может быть разделена на части, каждая из которых - уменьшенная версия целого. В финансах эта концепция - не беспочвенная абстракция, а теоретическая переформулировка практичной рыночной поговорки - а именно, что движения акции или валюты внешне похожи, независимо от масштаба времени и цены. Наблюдатель не может сказать по внешнему виду графика, относятся ли данные к недельным, дневным или же часовым изменениям. Известно правило первого месяца, согласно которому, как утверждают некоторые биржевые аналитики, как дела на бирже идут в первый месяц, примерно так же они будут идти в течении всего года. Это качество определяет диаграммы как фрактальные кривые и делает доступными многие мощные инструменты из математического и компьютерного анализа.